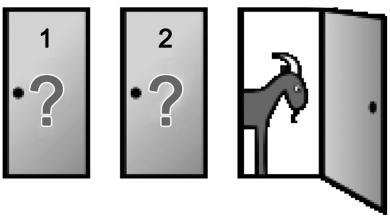
Zamijeniti ili ne zamijeniti vrata?

Danijel Krizmanić[1], *Hana Rizvić*[2]

U ovom članku prikazat ćemo jedan vjerojatnosni problem, popularno nazvan "Monty Hall problem". Ime je dobio po američkom televizijskom voditelju Monty Hallu u čijem je kvizu "Let's Make a Deal" bio uklopljen ovaj problem. O čemu se radilo u ovom kvizu? Pred natjecateljem su bila postavljena troja zatvorena vrata te mu je rečeno da je iza jednih od njih auto, a iza preostalih dviju koze (s time da je raspored auta i koza iza ova troja vrata slučajan). Naravno natjecatelj ne zna iza kojih se vrata nalazi auto, a iza kojih su koze. Igra se sastojala u tome da natjecatelj odabere jedna vrata te da, nakon što ih otvori, kući odnese plijen koji se nalazi iza njih. Cilj je dakako bio osvojiti auto. Ali postojao je i jedan međukorak koji je predstavljao srž kviza. Nakon što je natjecatelj odabrao svoja vrata, a prije nego je imao priliku otvoriti ih, voditelj kviza (koji je znao raspored auta i koza iza vratiju) je otvorio jedna od preostalih neodabranih vrata iza kojih se nalazila koza i ponudio natjecatelju mogućnost da promijeni svoj izbor, tj. da odustane od prvotno odabranih vrata i odabere druga (još neotvorena) vrata. Spomenimo ovdje da u slučaju da se auto nalazi iza vrata koje je prvotno odabrao natjecatelj, voditelj kviza slučajnim izborom odabire jedna od dviju preostalih vrata (iza obiju se nalazi koza) i otvara ih. U slučaju da se iza vrata koja je natjecatelj odabrao nalazi koza, tada voditelj nema izbora, već mora otvoriti ona vrata iza kojih se nalazi druga koza.



Slika 1. Natjecatelj izabire jedna vrata, recimo 1. Voditelj kviza onda otvara jedna od preostalih neodabranih vrata, recimo 3, iza kojih je koza, pa ponudi natjecatelju da vrata 1 zamijeni s 2.

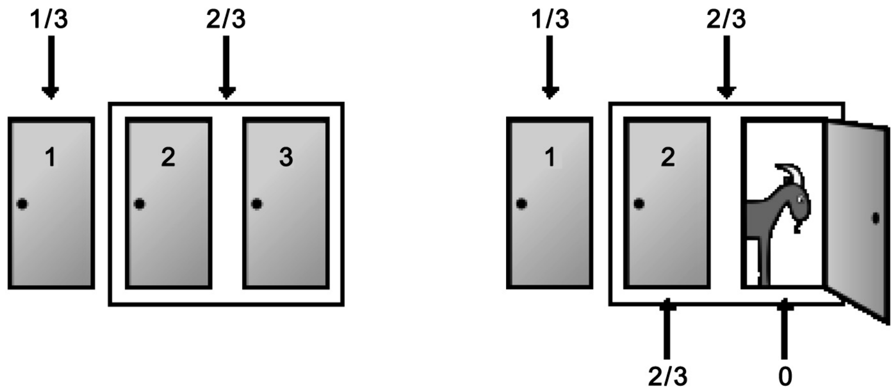
Većina ljudi bi vjerojatno u toj situaciji razmišljala na sljedeći način. Kako su jedna vrata već otvorena i iza njih je koza, znači od dvaju preostalih vrata iza jednih je auto, a iza drugih koza. Kako sada mogu izabrati jedna od ovih dvaju vrata (znači zadržavam prvotno odabrana vrata ili odabirem nova vrata), imam 50% šansi da odaberem vrata iza kojih je auto. Pa kako svaka vrata "imaju" vjerojatnost $\frac{1}{2}$ da se iza njih nalazi auto, svejedno mi je zadržim li prvotno odabrana vrata ili ih mijenjam za druga.

No takvo je razmišljanje, iako na prvi pogled sasvim korektno, zapravo pogrešno. Natjecatelj zamjenom vrata povećava svoje šanse da osvoji auto, i u ovom slučaju vjerojatnost osvajanja auta iznosi $\frac{2}{3}$, dok je vjerojatnost dobitka auta zadržavanjem svojih prvotno odabranih vrata $\frac{1}{3}$. Možemo reći da na početku igre svaka vrata imaju

[1] Viši asistent na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Rijeci, e-mail: `dkrizmanic@math.uniri.hr`

[2] Studentica na diplomskom studiju Diskretna matematika i primjene na Odjelu za matematiku Sveučilišta u Rijeci, e-mail: `hrizvic@student.uniri.hr`

vjerojatnost $\frac{1}{3}$ da se iza njih nalazi auto, otvaranjem jednih vrata od strane voditelja kviza, a iza kojih se nalazi koza, vjerojatnost dobitka auta za ta vrata se ne raspodjeljuje ravnomjerno na preostala dvoja vrata, već se "seli" u potpunosti na ona vrata koja natjecatelj nije u početku odabrao.



Slika 2. Raspodjela vjerojatnosti za osvajanje auta (uz pretpostavku da je natjecatelj prvotno izabrao vrata 1, a voditelj kviza otvorio vrata 3).

Reći ćete: "Nije fer, ispada kao da se neka viša sila urotila protiv natjecatelja i njegovih prvotno izabranih vrata". No zapravo nije tako. Pokušajmo sada objasniti u čemu je kvaka, a poslije ćemo to i formalno opravdati korištenjem matematičkog aparata. Natjecatelj, izabravši na početku igre jedna vrata (bez smanjenja općenitosti i radi ilustracije recimo da su to vrata 1), s vjerojatnošću $\frac{1}{3}$ će iza njih pronaći auto. Ako natjecatelj odluči ne mijenjati svoj izbor do kraja kviza, osvojit će auto jedino ako se on nalazi iza vrata 1, a to se događa u jednoj trećini slučajeva, jer zbog slučajnog rasporeda auta i koza, iza svakih vratiju se auto nalazi u jednoj trećini slučajeva, odnosno s vjerojatnošću $\frac{1}{3}$. Ali ako odluči zamijeniti svoja vrata, tada će osvojiti auto u svim onim slučajevima kada se ono nalazi iza vrata 2 ili 3. Naime, ako se auto nalazi iza vrata 2, voditelj kviza otvara vrata 3, pa natjecatelj mijenja vrata 1 za vrata 2 i dobiva auto. Isto tako, ako se auto nalazi iza vrata 3, voditelj otvara vrata 2, pa natjecatelj mijenja vrata 1 za vrata 3 i opet dobiva auto. Znači, u slučaju da se natjecatelj odluči promijeniti svoj izbor vratiju, osvaja auto u dvije trećine slučajeva, dakle s vjerojatnošću $\frac{2}{3}$.

Prije nego i matematički formalno opravdamo rješenje ovog problema, spomenimo problem "Tri zatvorenika", koji je ekvivalentan Monty Hall problemu. Tri zatvorenika (recimo A, B i C) su zatvorena svaki u svojoj ćeliji i osuđena na smrt. Upravitelj zatvora je izabrao jednog od ova tri zatvorenika slučajnim izborom i pomilovao ga. Zatvorski čuvar zna koji je zatvorenik pomilovan, ali to ne smije reći. Zatvorenik A moli zatvorskog čuvara za identitet jednog od preostalih zatvorenika (dakle B ili C) koji će biti pogubljen i kaže: "Ako će B biti pomilovan, reci mi ime zatvorenika C, ako će C biti pogubljen, reci mi ime zatvorenika B, a ako ću ja biti pogubljen, onda baci novčić kako bi odlučio hoćeš li mi reći ime zatvorenika B ili C". I čuvar popusti pa mu reče da će zatvorenik B biti pogubljen. Zatvorenik A se razveseli jer je uvjeren da mu je vjerojatnost preživljavanja narasla s $\frac{1}{3}$ na $\frac{1}{2}$, jer se sada borba za pomilovanje vodi između njega i zatvorenika C. Zatvorenik A potajno sve to kaže zatvoreniku C, te se i on razveseli, ali on je uvjeren da je vjerojatnost preživljavanja za zatvorenika A ostala $\frac{1}{3}$, dok je njegova narasla na $\frac{2}{3}$. Tko ima pravo na veselje?

Ako se malo pažljivije pogledaju ove situacije, može se zaključiti da je ovaj problem ekvivalentan izričaju Monty Hall problema (otvaranje vrata iza kojih je koza od strane voditelja kviza odgovara priopćenju čuvara zatvoreniku A da će B biti pogubljen). Zato je ispravan odgovor da zadovoljniji može biti zatvorenik C jer vjerojatnost da će upravo on biti pomilovan iznosi $\frac{2}{3}$.

Sada je došao red da matematički opravdamo ovaj zaključak. Pomoću teorema potpune vjerojatnosti prvo ćemo odrediti vjerojatnost osvajanja auta pri strategiji "zamijeni vrata kad ti voditelj to ponudi", a onda pri strategiji "nemoj zamijeniti vrata kad ti voditelj to ponudi". Događaj osvajanja auta pri prvoj strategiji označit ćemo s D_1, a pri drugoj s D_2. Radi jednostavnosti promatrat ćemo samo slučaj kada natjecatelj prvotno izabere vrata 1 (za prvotni odabir ostalih vrata, zbog simetričnosti, račun je analogan te ga ispuštamo). Uvedimo sljedeće događaje, odnosno hipoteze

$$H_i = \{\text{auto se nalazi iza vrata } i\}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Uočimo da zbog slučajnosti rasporeda auta i koza iza navedenih triju vrata vrijedi $P(H_1) = P(H_2) = P(H_3) = \frac{1}{3}$. Kako se događaji H_1, H_2 i H_3 uzajamno isključuju i točno jedan među njima se mora dogoditi, po teoremu potpune vjerojatnosti u slučaju korištenja prve strategije dobivamo

$$P(D_1) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(D_1|H_i),$$

gdje je za dva proizvoljna događaja A i B, takve da je $P(B) > 0$, $P(A|B)$ uvjetna vjerojatnost događaja A uz uvjet da se dogodio događaj B, definirana sa

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Ako se dogodila hipoteza H_1, tj. auto je iza vrata 1 onda će on, jer natjecatelj u ovom slučaju mijenja vrata, na ponudu voditelja promijeniti prvotno izabrana vrata 1 za vrata 2 ili 3, te će osvojiti kozu, pa je $P(D_1|H_1) = 0$. U slučaju da se dogodila hipoteza H_2, auto se nalazi iza vrata 2, pa voditelj kviza otvara vrata 3 i nudi zamjenu vrata 1 za vrata 2, što natjecatelj prihvaća i osvaja auto. Dakle $P(D_1|H_2) = 1$. Analogno je i $P(D_1|H_3) = 1$. Zato dobivamo

$$P(D_1) = \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}.$$

Ako pak koristimo drugu strategiju, sličnom argumentacijom kao gore, lako se dobije $P(D_2|H_1) = 1$, $P(D_2|H_2) = 0$ i $P(D_2|H_3) = 0$, odakle slijedi

$$P(D_2) = \sum_{i=1}^{3} P(H_i)P(D_2|H_i) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0 = \frac{1}{3}.$$

Dakle, natjecatelj zaista osvaja auto s vjerojatnošću $\frac{2}{3}$ ako zamijeni vrata pri ponudi voditelja, dok je ta vjerojatnost $\frac{1}{3}$ ako ostane pri svom prvotnom odabiru vrata.

Za kraj navedimo dvije modifikacije Monty Hallovog problema. Prvo ćemo povećati broj vrata. Zamislimo da umjesto troja imamo sto vrata, te da se samo iza jednih od njih nalazi auto, a iza svih ostalih koze. Natjecatelj opet odabire jedna vrata, ali sada voditelj, od 99 neodabranih vrata otvara njih 98 iza kojih su koze, te potom nudi natjecatelju zamjenu njegovih vratiju s onim jednim još neotvorenim. Intuitivno bi se moglo pomisliti da nema neke razlike ako se obavi zamjena ili ne, jer su preostala samo dvoja vrata, pa su šanse za osvajanje auta 50%, zamijenili vrata ili ne. Ali mi sada znamo da nije tako, i na osnovu originalnog Monty Hallovog problema možemo zaključiti da natjecatelj, ako zamijeni vrata, ima 99% šansi da osvoji auto, a samo 1% ako ne zamijeni vrata. Kod ove modifikacije, kao i kod originalnog Monty Hallovog problema s puno natjecatelja, iako možda intuicijom navedeni na krivi zaključak da imaju podjednake šanse za osvajanje auta zamijenili vrata ili ne, moglo bi ipak pristati na zamjenu vrata (ovaj krivi zaključak ne preferira niti jednu opciju, jer svakoj daje jednaku šansu za osvajanje auta). Ali u sljedećoj modifikaciji će krivi zaključak preferirati jednu opciju i to onu lošiju po natjecatelja (osim ako nije došao na kviz s ciljem osvajanja koze). Pretpostavimo da imamo pet vrata i da se opet auto nalazi iza samo jednih od njih, a iza preostalih su koze. Sada natjecatelj na početku odabire dvoja vrata. Tada voditelj kviza od triju neodabranih vrata otvara dvoja iza kojih se nalaze koze. I onda ponudi natjecatelju da zamijeni svoja dvoja vrata s preostalim jednim neotvorenim. Intuicija bi natjecatelju mogla reći da to nikako nije povoljna ponuda, jer kako su dvoja otvorena vrata izvan igre, vjerojatnost da osvoji auto ukoliko ostane pri svom početnom odabiru iznosi $\frac{2}{3}$, dok ako pristane na zamjenu ta vjerojatnost bi bila samo $\frac{1}{3}$. Na temelju svega već rečenog, znamo da bi takva intuicija bila pogrešna, jer je vjerojatnost osvajanja auta, ukoliko prihvati ponudu o zamjeni "dvoja vrata za jedna" zapravo $\frac{3}{5}$, a ako ne prihvati $\frac{2}{5}$.

Literatura

[1] N. Sarapa, *Vjerojatnost i statistika, I. dio: Osnove vjerojatnosti – kombinatorika*, Školska knjiga, Zagreb, 1993.

[2] H. Rizvić, *Teorija vjerojatnosti i igre na sreću*, završni rad na preddiplomskom studiju matematike, Odjel za matematiku, Sveučilište u Rijeci, 2012.

[3] `http://en.wikipedia.org/wiki/Monty_Hall_problem`